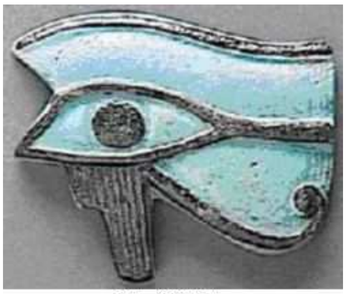
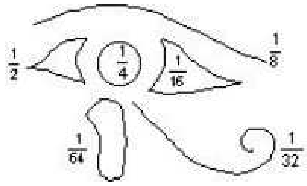
Pierre-Yves Gouiffes – Collège Joseph-Anglade de Lézignan-Corbières

Les fractions égyptiennes


Extrait du Papyrus Rhind (1650 avant J.-C.)

Les documents mathématiques de l'Egypte antique sont rares. Le papyrus Rhind, de la seconde période intermédiaire aurait été écrit par le scribe **Ahmes**. Son nom vient de l'Écossais **Alexander Henry Rhind** (1833-1863) qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes. Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmes indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers 2 000 av. J.-C.) remontant aux Babyloniens. Il fut écrit en écriture hiératique.
Une **fraction égyptienne** est une fraction dont le numérateur est égal à 1. N'importe quelle fraction peut se décomposer en une somme de fractions égyptiennes distinctes.


L'oeil Oudjat



Exercice 1 (œil **Oudjat**)

A propos des fractions égyptiennes, il existe un épisode sanglant de la mythologie : Au cours d'un combat **Seth** (Dieu de la violence) arracha un œil à son neveu **Horus** (Dieu à tête de faucon et à corps d'homme). Il le partagea en 6 morceaux et le jetta dans le Nil. Cet œil est appelé Oudjat. Les six morceaux sont la petite pyramide $\frac{1}{2}$, le Soleil $\frac{1}{4}$, la grande pyramide $\frac{1}{16}$, la ligne de sol $\frac{1}{8}$, le bloc poussé par l'égyptien $\frac{1}{64}$ et la ligne recourbée $\frac{1}{32}$. **Thot** (Dieu humain) reconstitua l'œil, symbole du bien contre le mal mais la somme de ces parts n'était pas égale à 1 (l'œil entier). Il accordait le 64ème manquant à tout scribe recherchant et acceptant sa protection. Calculer la somme des fractions de l'œil Oudjat.

Exercice 2 (calculs du papyrus Rhind)

1. Calculer (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ $\quad B = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ $\quad C = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ $\quad D = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$

2. Résoudre les équations suivantes (donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + x + \frac{1}{114}$ $\quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + y$

Exercice 3 (décompositions de fractions)

1. Vérifier et terminer les calculs suivants pour obtenir une somme de fractions égyptiennes distinctes.

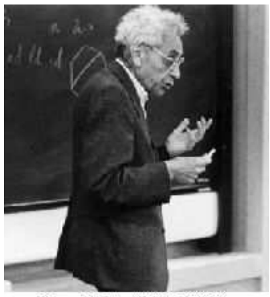
$E = \frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = \frac{5}{10} + \frac{1}{10} = \ldots$

$F = \frac{5}{7} = \frac{5 \times 2}{7 \times 2} = \frac{10}{14} = \frac{7}{14} + \frac{2}{14} + \frac{1}{14} = \ldots$

2. Multiplier numérateur et dénominateur par 2 puis terminer le calcul comme précédemment pour obtenir une somme de fractions égyptiennes distinctes.

$G = \frac{4}{5}$ $\quad H = \frac{6}{11}$ $\quad I = \frac{5}{9}$

Exercice 4 (conjecture d'Erdös-Graus)


Pavel Erdös (1913-1996)

La conjecture des mathématiciens **Pavel Erdös** et **E.G. Graus** prétend que toute fraction de numérateur 4 peut s'écrire sous la forme d'une somme de trois fractions égyptiennes distinctes. Autrement dit, pour tout nombre entier n supérieur à 1, il existe trois entiers a, b et c distincts tels que : $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Cette conjecture a été vérifiée pour tous les entiers inférieurs à 10^{14} mais reste à démontrer.

1. Parmi les décompositions calculées précédemment, laquelle vérifie la conjecture d'Erdös-Graus.

2. Vérifier la conjecture pour $n = 17$, $a = 6$, $b = 17$ et $c = 102$.

Exercice 5 (conjecture de Sierpinski)


(1882-1969)

La conjecture du mathématicien polonais **Waclaw Sierpinski** est presque identique mais avec 5 au numérateur. Autrement dit, pour tout nombre entier n supérieur à 1, il existe trois entiers a, b et c distincts tels que : $\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Cette conjecture n'a toujours pas été démontrée.

1. Parmi les décompositions calculées précédemment, laquelle vérifie la conjecture de Sierpinski.

2. Vérifier la conjecture pour $n = 37$, $a = 8$, $b = 148$ et $c = 296$.

3. Décomposer $\frac{5}{11}$ en une somme de trois fractions égyptiennes distinctes (multiplier numérateur et dénominateur par 3).