LE TRIANGLE RECTANGLE

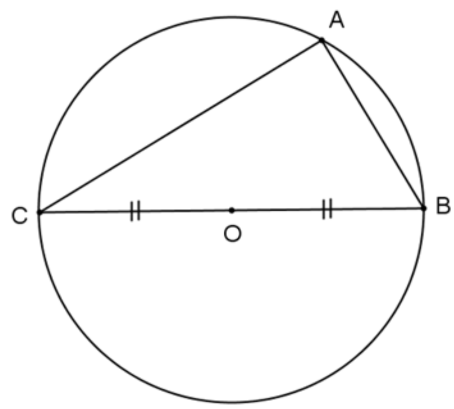
Compétences

III	Géométrie	Connaître les fonctions trigonométriques	1	2	3	4
		Calculer un côté (trigonométrie)	1	2	3	4
		Calculer un angle (trigonométrie)	1	2	3	4
		Utiliser les relations trigonométriques	1	2	3	4
		Calculer un côté (Pythagore)	1	2	3	4
		Déterminer si un triangle est rectangle (Pythagore)	1	2	3	4
		Déterminer si un triangle inscrit dans un cercle est rectangle	1	2	3	4

I Le théorème de Pythagore

Propriété (P1) – Théorème de l'angle droit

Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés alors il est rectangle et ce diamètre est l'hypoténuse.



Exemple

Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

On sait que : … appartient au cercle de diamètre [……].

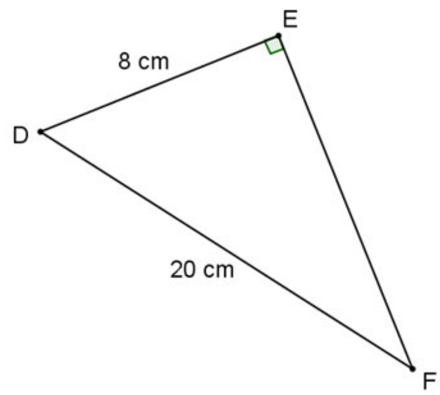
On utilise : ………………………………………………………….

………………………………………………………….

On conclut : le triangle ABC est rectangle en …

Propriété (P2) – Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.



Exemple

EDF est un triangle rectangle en E tel que DE = 8 cm et DF = 20 cm. Calculer EF au dixième.

On sait que : le triangle DEF est rectangle en …

On utilise : le théorème de P……………

On conclut : $DF^2 = ……^2 + ……^2$

$……^2 = ……^2 + ……^2$

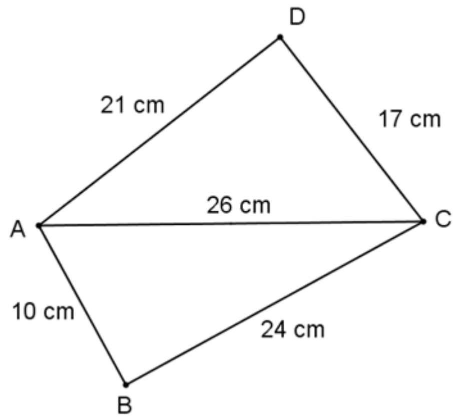
$EF^2 = ……^2 - ……^2 = …… - …… = ……$

$EF = \sqrt{……} \approx ……$

[EF] mesure …… cm arrondi au d……………

Propriété (P3) – Réciproque du théorème de Pythagore

Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle et l'angle droit est l'angle opposé au plus grand côté.



La réciproque du théorème de Pythagore permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exemple

Le triangle ABC est-il rectangle ? Le triangle ACD est-il rectangle ?

Dans le triangle ABC :

D'une part : $AC^2 = \ldots\ldots^2 = \ldots\ldots$

D'autre part : $AB^2 + BC^2 = \ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

On sait que : $\ldots\ldots^2 = \ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2$.

On utilise : la r…………… du théorème de P……………

On conclut : ABC est un triangle rectangle en …

Dans le triangle ACD :

D'une part : $AC^2 = \ldots\ldots^2 = \ldots\ldots$

D'autre part : $AD^2 + DC^2 = \ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

On sait que : $\ldots\ldots^2 \neq \ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2$.

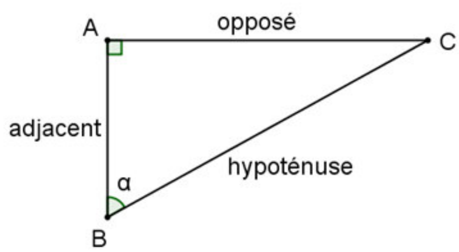
On utilise : le théorème de P……………

On conclut : ADC n'est pas un triangle r…………

II La trigonométrie

Histoire

Trigonométrie vient du grec « mesure des triangles » mais ce sont les astronomes babyloniens qui sont à l'origine de cet outil. Lorsqu'ils observaient le ciel, ils ne pouvaient pas mesurer des distances entre les étoiles et les planètes, mais ils pouvaient mesurer des angles. Ils ont donc créé un outil qui permet de passer des mesures d'angles aux mesures des distances.



Dans un triangle rectangle, on peut définir les relations suivantes entre les angles aigus et les différentes longueurs des côtés.

Définition (D1) – Formules

$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \quad ; \quad \text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \quad ; \quad \text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Exemple

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad ; \quad \sin \widehat{ABC} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad ; \quad \tan \widehat{ABC} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Propriété (P4) – Encadrement

Si $0 < \alpha < 90$ alors $0 < \cos \alpha < 1$ et $0 < \sin \alpha < 1$.

Autrement dit, le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1.

Preuve

ABC est un triangle rectangle en A et α désigne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

$0 < \cos \alpha = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} < 1$ car $\ldots\ldots < \ldots\ldots$ $\qquad$ $0 < \sin \alpha = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} < 1$ car $\ldots\ldots < \ldots\ldots$

Propriété (P5) – Encadrement

Si $0 < \alpha < 90$ alors $\tan \alpha > 0$.

Autrement dit, la tangente d'un angle aigu est strictement positive.

Preuve

ABC est un triangle rectangle en A et α désigne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$. $\tan \alpha = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} > 0$

Propriété (P6)

Si $0 < \alpha < 90$ alors $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Preuve

On sait que : ABC est un triangle rectangle en A et α désigne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

① On utilise : les formules trigonométriques.

On conclut : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = (\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2 = \left(\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right)^2 + \left(\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right)^2 = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} + \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

② On utilise : le théorème de Pythagore.

On conclut : $\ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Donc $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

Propriété (P7)

Si $0 < \alpha < 90$ alors $\tan \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Preuve

ABC est un triangle rectangle en A et α désigne la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
On utilise : les formules trigonométriques.

On conclut : $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}}{\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \times \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$