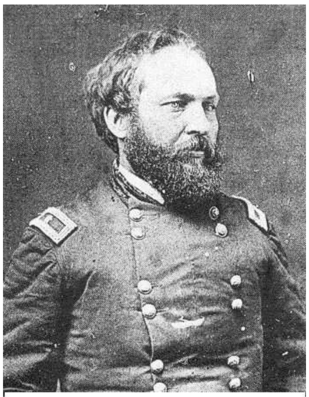
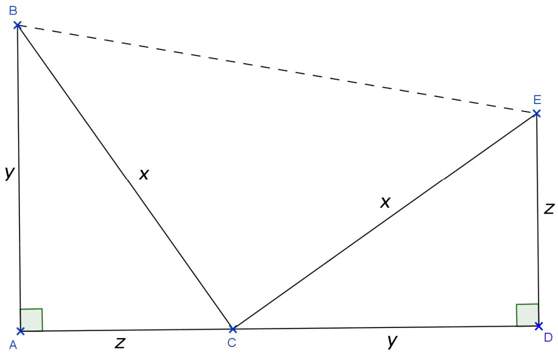
LA DEMONSTRATION DU THEOREME DE PYTHAGORE PAR GARFIELD


James Abram Garfield

Le XXème président des Etats-Unis en personne, **James Abram Garfield** (1831-1881), qui avait la curieuse réputation de pouvoir écrire en grec d'une main et en latin de l'autre, a donné l'une de ses cent preuves du théorème de Pythagore. Orphelin à deux ans, il est d'abord conducteur de bateaux puis gagne assez d'argent pour étudier. Il obtient son diplôme du Collège Williams dans le Massachusetts en 1856 et il enseigne de 1857 à 1860 les langues anciennes. Il est élu au Sénat de l'Ohio en 1859 (candidat républicain). Pendant la guerre de Sécession, il soutient le retour des Etats qui veulent se séparer de l'Union. En 1862, il revient victorieux d'une bataille contre les troupes de la Confédération. Il est élu au Congrès mais le président **Abraham Lincoln** (1809-1865) le force à démissionner. Réélu pendant dix-huit années consécutives, il accède à une position de responsabilité élevée chez les Républicains et devient leur leader en 1876. Il est élu Président des Etats-Unis en 1880. Le 2 juillet 1881, **Charles Guiteau** tire sur lui et James Garfield est mortellement touché. Les docteurs essayent de trouver la balle avec un nouveau détecteur de métal inventé par **Alexander Graham Bell** (1847-1922). Mais c'est un échec car James Garfield est couché sur un lit avec des ressorts métalliques et personne ne songe à le changer de place. Il meurt le 19 septembre 1881. Il est le deuxième président des Etats-Unis à être assassiné lors de l'exercice de ses fonctions.

ABC est un triangle rectangle en A tel que BC = x, AB = y et AC = z.

On place le triangle ABC et un triangle CDE superposable à ABC tel que les points A, C et D soient alignés.



1. Construire une figure pour y = 6 cm et z = 4,5 cm.
2. ***a)*** Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

   b) En déduire que ABED est un trapèze rectangle.
3. Montrer que l'angle $\widehat{BCE}$ est droit.
4. ***a)*** En additionnant l'aire des trois triangles, montrer que l'aire du trapèze ABED est égale à $\dfrac{x^2}{2} + yz$.

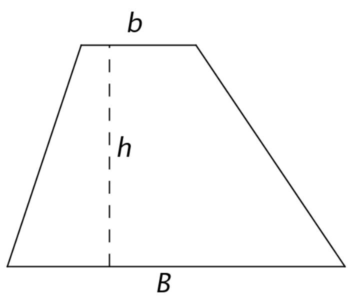
   b) En appliquant la formule directe, montrer que l'aire du trapèze ABED est égale à $\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} + yz$.
5. En déduire la relation de Pythagore : $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
6. Calculer x pour y = 6 cm et z = 4,5 cm.

<u>Indication</u> :

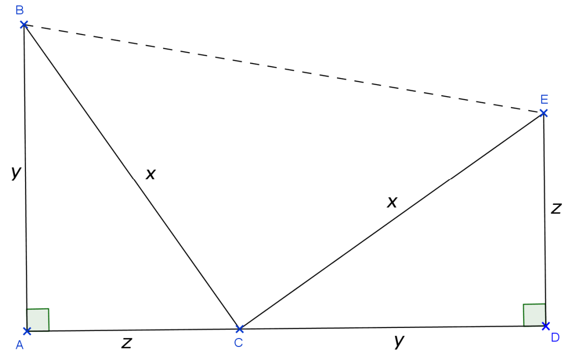
Définition : Le *trapèze* est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

Propriété : Pour calculer son aire, on utilise la formule suivante :

$$\boxed{A = \frac{(b+B)\times h}{2} = \frac{(\textit{petite base} + \textit{grande base}) \times \textit{hauteur}}{2}}.$$



AV2	CL1	CO1	GE1	PY1



1. Construction. (2)

2. ***a)*** On sait que les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AD). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.
Donc **les droites (AB) et (DE) sont parallèles**. (1,5)

b) On sait que les droites (AB) et (DE) sont parallèles. Or un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles et un trapèze.
Donc ABED est un trapèze.
De plus, les droites (AB) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (AD).
Donc **ABED est un trapèze rectangle**. (2,5)

3. Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.
Donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$ et $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{ABC}$.
Les triangles ABC et CDE sont superposables donc $\widehat{ABC} = \widehat{DCE}$.
D'où $\widehat{ACB} = 90° - \widehat{DCE}$.
L'angle $\widehat{ACB}$ est plat. Donc $\widehat{ACB} + \widehat{BCE} + \widehat{DCE} = 180°$.
$$\left(90° - \widehat{DCE}\right) + \widehat{BCE} + \widehat{DCE} = 180°.$$
$$\widehat{BCE} = 180° - 90° = 90°.$$
Donc **l'angle $\widehat{BCE}$ est droit**. (3,5)

4. ***a)*** $\text{Aire(ABED)} = \text{Aire (ABC)} + \text{Aire(BCE)} + \text{Aire(CDE)}$
$$= \frac{AC \times AB}{2} + \frac{CE \times BC}{2} + \frac{CD \times CE}{2}$$
$$= \frac{yz}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{yz}{2} = \boldsymbol{yz + \frac{x^2}{2}}.$$ (3,5)

b) $\text{Aire(ABED)} = \frac{(AB + DE) \times AD}{2} = \frac{(y + z) \times (y + z)}{2} = \frac{(y + z)^2}{2} = \frac{y^2 + 2yz + z^2}{2} = \boldsymbol{\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + yz}$. (2)

5. $\text{Aire(ABED)} = yz + \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + yz$.
D'où : $\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ et $x^2 = y^2 + z^2$. On obtient donc la relation de Pythagore : $\mathbf{BC^2 = BA^2 + AC^2}$. (2)

6. On sait que le triangle ABC est rectangle en A. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.
$BC^2 = BA^2 + AC^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 20{,}25 + 36 = 56{,}25$.
$BC = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ (en cm).
[BC] mesure 7,5 cm.